419. 境界点ノ Regularity ニ就テ

井 上 正 雄（阪大）

平面上ノ有界ナ領域ヲ Ω，ソノ境界点ノ集合ヲ Σ デ表ハス。

Σ 上ニ連続函数 $f(z)$ ヲ與ヘタトキ，コノ境界條件ニヨリ，Wiener ノ所謂 *generalised solution of Dirichlet*[1]，$H_f(z)$ が唯一的ニ決定サレル。境界点 z' が Σ 上ノ任意ノ連続函数 $f(z)$ ニ對シ常ニ $\overleftrightarrow{H}_f(z')$[2] $= f(z')$ ヲ満足スルトキ，z' ヲ *regular* ナ境界点ト呼ブ。

---

(1) Wiener *Certain notions in potential theory*
J. Math. Ph. Massach. Instit. 1924.

(2) $\overleftrightarrow{H}_f(z')$ ノ意味：

z' ノ ρ 近傍ヲ $U_\rho(z')$ ト表ハストキ

$$\lim_{\rho\to 0}\ \underset{z\in U_\rho(z')\cdot\Omega}{\text{o. G.}}\ H_f(z) = \overrightarrow{H}_f(z'),\quad \lim_{\rho\to 0}\ \underset{z\in U_\rho(z')\cdot\Omega}{\text{u. G.}}\ H_f(z) = \overleftarrow{H}_f(z')$$

一般ニ $\overleftarrow{H}_f(z') \leqq \overrightarrow{H}_f(z')$，トクニ $\overleftarrow{H}_f(z') = \overrightarrow{H}_f(z')$ ナルトキ之レヲ $\overleftrightarrow{H}_f(z')$ デ表ハス。

上ノ *generalised solution* $H_f(z)$ ハ Σ 上デ *Capacity* 0 ノ集合ヲ除イテ $\overleftrightarrow{H}_f(z') = f(z')$ ナルコトが知レテイル。

サテ

$$\underset{z\in\Omega}{\mathrm{O.G.}}\,|z| = R \text{ トシ,}$$

$z \in \mathcal{R}$[3] $(|z|\leqq R)$ 且ツ $z \,\overline{\in}\, \Omega$ ナル z ノ絶対値ノ集合ヲ E_Ω デ表ハセバ，之レハ $[0, R]$ 上ノ閉集合トナル、E_Ω ト $[r_1, r_2]$ トノ Durchnitt ヲ $E_\Omega(r_1, r_2)$ デ表ハスコトニスル。

シカルトキ Beurling ハ彼ノ thèse[4] ニヨイテ，

境界点 z' ガ regular ナルタメノ條件トシテ

$$\left.\begin{array}{l} z\in\Sigma,\ |z-z'|<r \\ r \text{ ハ任意ノ正数} \end{array}\right\} \text{トスルトキ}$$

T.V. $\log|z-z'|$ ガ有界デナイコト

ヲ証明シタ。Notation ヲ簡単ニスルタメ $z'=0$ ト假定スレバ（コノ假定ハ一般性ヲ失ハナイ），

$$\int_{E_\Omega(0,r)} d\log t = +\infty \text{ ---------- } (S)$$

ナルコトデアル。

コヽデハ，コノ條件ガ必要條件デハナイコトヲ example ヲ作ルコトニヨツテ証明シヨウ。——コレハ同時ニ regular ナ無限次連結領域[5]（孤立境界点ヲ含マナイ）ノ例ニモナツテイルノデアル。

---

(3) 平面上ノ $|z|\leqq R$ ヲ満足スル点集合ヲ意味ス。

(4) A. Beurling　Etudes sur un Problème de majoration

(5) domain ガ regular トハ普通ノ意味デノ Dirichlet ノ解ガ常ニ存在スル domain ヲ云フ. 従ツテ regular domain ノ境界

（次頁へ）

$$\mathcal{R}(|z|=1)=\Sigma \qquad , \quad \mathcal{R}(|z|<1)=E$$

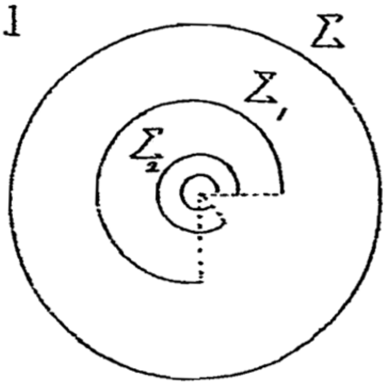
$$\mathcal{R}\left(z=\frac{1}{2}e^{i\theta},\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\Sigma_1,\quad E - \Sigma_1=E_1$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\mathcal{R}\left(z=\frac{1}{2^n}e^{i\theta},\ \theta\leqq 2\pi-\frac{\pi}{2^n}\right)=\Sigma_n \quad , \quad E_{n-1}-\Sigma_n=E_n$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

Fig. 1



E_n ($n=1,2,\text{-------}$) ガ regular ナルコトハ上ノ criterion ニヨリ明ラカデアル。

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega_0,$$

$$\Omega_0 - \{0\} = \Omega$$

トスレバ Ω ハ無限次連結領域トナリ、原点以外ノ境界点ガ regular ナルコトハ明ラカデアルガ原点モ亦 regular トナルコトガ次ノ如クシテ証明サレル。

点ハ皆 regular デアリコノ逆ヲ成立スル。

又孤立境界点ヲ含マス有限次連結領域ハ regular domain ナルコトハ既ニ Lebesgue ニヨッテ証明サレテイル。

H. Lebesgue Sur le problème de Dirichlet Rendic. circ. mat. Palermo 1907.

ソレニハ Bouligand ノ定理[6] ニヨリ $\overleftarrow{\overrightarrow{H(0)}}=0$ ヲ満足サス Ω デノ positive harmonic function ノ存在ヲ証明スレバ充分デアル。

ソノタメニ、

Σ 上デ 1, Σ_1 上デ 0 　ナル値ヲトル E_1 デノ harmonic function ヲ $H_1(z)$

Σ 上デ 1, Σ_1, Σ_2 上デ 0 　〃 E_2 〃 $H_2(z)$

⋮

Σ 〃 1, $\Sigma_1, \cdots \Sigma_n$ 上デ 0 　〃 E_n 〃 $H_n(z)$

⋮

（E_n ハ regular domain デアルカラ、カヽル $H_n(z)$ ハ存在スル）

カクテ得ラレタ $\{H_n(z)\}$ ハ下方ニ有界ナ単調ニ減少スル調和函数ノ系列デアルカラ Harnack ノ定理ニヨリ

$$\lim_{n\to\infty} H_n(z)=H(z)$$

ガ Ω デ存在シ且ツ $H(z)$ ハ Ω デノ harmonic function デアル。

シカモ $H(z)>0$ デアル（$H(z)\geqq 0$ ナルコトハ明ラカデアル）

Σ 上デ 1, $\Sigma_1'=\mathfrak{R}\left(|z|=\frac{1}{2}\right)$ デ 0 ヲトル $\frac{1}{2}<|z|<1$

---

(6) Ω ノ境界点 z' ガ regular ナルタメノ必充條件ハ $\overleftarrow{\overrightarrow{H(z')}}=0$ ヲ満足スル $U_\rho(z')\cdot\Omega$ デノ positive harmonic function $H(z)$ ノ存在スルコトデアル。
（ρ ハ任意ノ正数）

デノ調和函数ヲ $u(z)$ トスレバ、スベテノ n ニツイテ

$(n=1,2,\cdots\cdots)$

コノ Ring domain 内デ $H_n(z)>u(z)>0$

$$\therefore\quad \lim H_n(z)=H(z)\geqq u(z)>0$$

故ニ勿論 $\mathfrak{S}$ 内デ $H(z)>0$ デアル。

次ニ

$$H_n(0)<\frac{1}{2^{n+1}}$$

トナルカラ

$$\lim_{n\to\infty} H_n(0)=H(0)=0$$

故ニ　任意ニ $\varepsilon>0$ ヲ與ヘタトキ $N(\varepsilon)$ ガ定リ

$$\varepsilon>H_N(0)>H_{N+1}(0)>\cdots\cdots\cdots\cdots>0$$

故ニ H_N ニ關シテ δ ガ定リ $|z|<\delta$, $z\in\mathfrak{S}_0$ ニ對シテ

$$\varepsilon>H_N(z)>H_{N+1}(z)>\cdots\cdots\cdots\cdots>0$$

故ニ

$$\varepsilon>\underset{|z|<\delta}{\mathrm{O.G.}}\ H(z)>0$$

$$\delta\to0\qquad \varepsilon>\overrightarrow{H(0)}\geqq0$$

シカルニ ε ハ如何程小サクテモヨイカラ結局

$$\overleftrightarrow{H(0)}=0$$

トナル。

故ニ原点 O ハ regular ナルコトガ解ッタ。

然ルニ明ラカニ $\displaystyle\int_{E_{\mathfrak{S}}(0,r)} d\log t=0$ デアル、故ニ條件 (ε) ハ

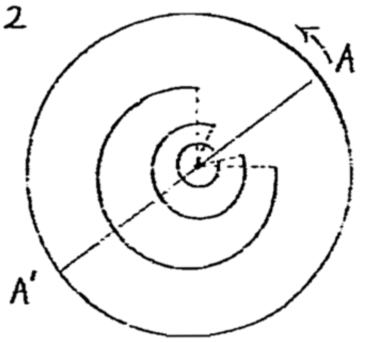
必要條件デハナイ。

又一方之レデ Ω ガ regular domain ナルコトヲ証明サレタ。

即チ Ω ガ求ムル regular ナ無限次連結領域デアル。以上ハ二次元デヤッタノデアルガ同様ノ example デ三次元デモ作レル。

即チ Fig. 2 ヲ AA' ヲ軸トシテ回轉シテ生ズル三次元デノ無限次連結領域モ亦 regular ニナルコトハ同様ニシテ証明サレル。

Fig. 2



尚 n 次元ノ場合ニヲイテ境界点ノ regular ナルタメノ必充條件ハ既ニ Wiener ニヨッテ求メラレテイル。[(7)]

最後ニ一言次ノコトヲ附加シヤウ：

"可附番個ノ regular domain ノ durchnitt ガ domain トナルナラバ，ソレハ regular domain デアル"

コレハ Bouligand ノ定理ヨリ直チニ証明スルコトガ出來ル。

シカシ regular domain ノ Vereinigungsmenge ガ必ズシモ regular トナラナイコトハ次ノ例デモ容易ニ

---

(7) Wiener

The Dirichlet Problem

J. Math. Ph. Massach. Instit 1924.

解ルコトデアル。